知能ソフトウェア特論
Intelligent Software

項書換え系（２）
停止性

Term Rewriting Systems(2)
Termination

1．項書換え系の基本用語と記法 (1/4)

(Terminology and notation for term rewriting systems)

基本的な記号

- 変数　$x, y, z, \ldots$
- 定数　$0, 1, \ldots, a, b, c, \ldots$
- 関数記号 $f, g, h, \ldots$

　アリティ（引数の個数）は記号ごとに固定

Atomic symbols are classified into
variables (x,y,z,⋯),
constants (0,1,⋯,a,b,c,⋯), and
function symbols (f,g,h,⋯).

項　変数，定数，または $f(t_1, \ldots, t_n)$

F：　関数記号（定数を含む）の集合
V：　変数の集合
$T(F, V)$：F と V から作られる項の集合

A term is either a variable, a constant, or $f(t_1,\cdots,t_n)$, if f is a function symbol and t_1 ,⋯, t_n are terms.

F is a set of function symbols and constants.
V is a set of variables.
$T(F, V)$ is a set of terms constructed from F and V.

書換え規則　２つの項の順序対 $l \to r$

A rewrite rule is an ordered pair $l \to r$ of terms

項書換え系　書換え規則の集合 R

A term rewriting system (TRS) R is a set of rewrite rules.

1．項書換え系の基本用語と記法 (2/4)

代入 $\sigma : V \to T(F,V)$

各変数 $x \in V$ に項 $\sigma(x) \in T(F,V)$ を割り当てる写像．つぎの形の集合で表現する

$$\sigma = \{x_1 \mapsto \sigma(x_1), \ldots, x_n \mapsto \sigma(x_n)\}$$

Example: $\sigma = \{x \mapsto a, \quad y \mapsto f(x,a)\}$

A substitution σ:$V\to T(F,V)$ is a mapping that assigns each variable x in V with a term σ(x) in $T(F,V)$. It is represented as a set in the form shown here.

代入の適用 $\sigma(t)$

項 t に出現している各変数 x を

$\sigma(x)$ に置き換えた項を

$\sigma(t)$ と書く

An application σ(t) of a substitution σ to a term t is a term obtained from t by replacing all variables x in t by the term σ(x).

Example: If $\sigma = \{x \mapsto a, y \mapsto f(b)\}$, then

$$\sigma(f(g(x,y))) = f(g(a, f(b)))$$

1. 項書換え系の基本用語と記法 (3/4)

インスタンス

$\sigma(t)=s$ となる代入 σ が存在するとき,
s は t のインスタンス

A term s is an instance of a term t if there exists a substitution σ such that $\sigma(t)=s$.

Example: $f(g(a))$ is an instance of $f(x)$.

1． 項書換え系の基本用語と記法 (4/4)

簡約可能 $s \to_R t$

ある書換え規則 $l \to r \in R$ の左辺のインスタンス $\sigma(l)$ が項 s の部分項として含まれていて，$\sigma(l)$ を $\sigma(r)$ に置き換えたときに，s が t になるとき，$s \to_R t$ と書き，s は t に簡約可能という

Reduction relation $\to_R$

A term s is reducible to t, notation $s \to_R t$, if there exists a rewrite rule $l \to r$ in R such that t is obtained from s by replacing an instance $\sigma(l)$ (contained in s as a subterm) by the corresponding instance $\sigma(r)$.

Example:

the rewrite rule $f(x) \to g(x)$

the reduction relation $h(f(a)) \to_R h(g(a))$

2．停止性の決定不能性 (1/2)

(Undecidability of termination)

停止性

どんな初期項 t_0 からも，書換えの無限列 $t_0 \to_R t_1 \to_R t_2 \to_R \cdots$ が存在しないとき，R は停止性をもつ

Termination

A TRS R is terminating, if there exists no infinite rewrite sequence $t_0 \to_R t_1 \to_R t_2 \to_R t$ from any initial term t_0.

（例１）

$$R = \begin{cases} f(0,1,x) \to f(x,x,x) \\ g(x,y) \to x \\ g(x,y) \to y \end{cases}$$

は停止性をもたない

$$\begin{aligned} & f(g(0,1), g(0,1), g(0,1)) \\ & \to_R \cdot \to_R f(0,1,g(0,1)) \\ & \to_R f(g(0,1), g(0,1), g(0,1)) \\ & \to_R \cdots \end{aligned}$$

(Example 1)

The TRS R shown here is NOT terminating, because there is an infinite rewrite sequence as follows.

2．停止性の決定不能性 (2/2)

定理１（停止性は決定不能）

項書換え系の停止性は決定不能である.

すなわち，任意の項書換え系 R を入力として受け取り，それが停止性をもつかどうかを判定するアルゴリズムは存在しえない.

Theorem 1 (undecidability of termination)

Termination of TRSs is undecidable.
In other words, there exists no algorithm that accepts a TRS as an input and decides whether it is terminating or not.

⇒ 工学的な研究目標：
できるだけ広い範囲の項書換え系の停止性を検証できるアルゴリズムの開発

Engineering research goal:
development of algorithms that can verify the termination of broader classes of TRSs.

3．簡約順序 (1/6)

(Reduction order)

定理２（停止性の必要十分条件）

項書換え系 R が停止性をもつ必要十分条件は
すべての書換え規則 $l \to r \in R$ について $l > r$
となる簡約順序 > が項の集合の上に存在すること

Theorem 2 (necessary and sufficient condition for termination)
A TRS R is terminating if, and only if,
$l > r$ for all rewrite rules $l \to r$ of R
in some reduction order > on the set of terms.

例：

$$R = \begin{cases} not(and(x,y)) \to or(not(x), not(y)) \\ not(not(x)) \to x \end{cases}$$

このRが停止性をもつことを証明するには，
ある簡約順序 > を用いて，次のことを示せばよい

Example: In order to prove the termination of the TRS R shown here, we need to prove the two inequalities given below, using some reduction order >.

$$not(and(x,y)) \succ or(not(x), not(y))$$

$$not(not(x)) \succ x$$

（例3へ）

3．簡約順序 (2/6)

二項関係　２つの要素間の関係の概念を抽象化したもの

Binary relation is an abstraction of a relationship between two objects.

集合 S 上の二項関係 R は，直積 $S \times S$ の部分集合.

$$R \subseteq S \times S = \{ (x, y) \mid x \in S, y \in S \}$$

$(x, y) \in R$ のとき，$x \, R \, y$ と書く.

Formally, a binary relation R on a set S is a subset of the Cartesian product $S \times S = \{ (x,y) \mid x \in S, x \in S\}$. When $(x,y) \in R$, we write xRy.

Example: $S = \{a, b, c\}$, $R = \{(a,b),(a,c),(b,c)\}$, $a \, R \, b$

この授業ではR のかわりに不等号＞などを使う

In this lecture, we often use the symbol > instead of R.

3．簡約順序 (3/6)

厳格半順序

2つの要素間の大小関係を抽象化したもの

推移性: $x>y \wedge y>z \Rightarrow x>z$

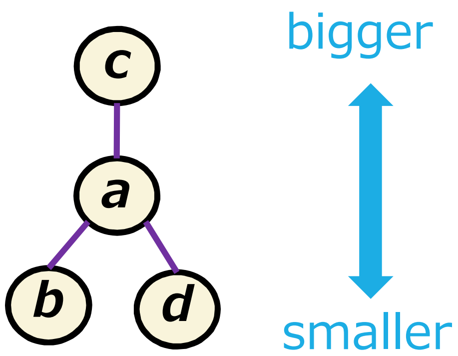
と

非反射性: $\neg(x>x)$

を満たす二項関係 $>$

Strict partial order is an abstraction of "*is greater than*" relationship.
Formally, a strict partial order is a binary relation $>$ that satisfies
transitivity: if $x>y$ and $y>z$, then $x>z$
and
irreflexivity: $\neg(x>x)$ for any x.

Example: $S = \{a, b, c, d\}$,
$> \; = \{(a,b),(a,d),(c,a),(c,b),(c,d)\}$.



3．簡約順序 (4/6)

簡約順序　整礎な書換え順序のこと

A reduction order is a *well-founded rewrite order*.

● 書換え順序　項の集合の上で定義された単調で安定な厳格半順序 >

A rewrite order is a *monotone* and *stable* strict partial order > defined on a set of terms.

単調性：局所的な減少が大域的な減少となる．すなわち，任意の項s,tについて

$s > t$ ならば $f(..,s,..) > f(..,t,..)$

A monotone order ensures that local decrease implies global decrease, i.e., $s>t$ implies $f(\cdots,s,\cdots)>f(\cdots,t,\cdots)$.

安定性：代入により順序が変化しない．すなわち，任意の項 s,t と代入 σ について

$s > t$ ならば $\sigma(s) > \sigma(t)$

A stable order ensures that the order is preserved by substitution, i.e., $s>t$ implies $s(s)>s(t)$.

● 整礎　無限下降列 $a_1>a_2>a_3>\cdots$ が存在しない

A well-founded order ensures that there is no infinitely decreasing sequence $a_1>a_2>a_3>\cdots$

3．簡約順序 (5/6)

（例２）
項 t のサイズ（含まれる変数，定数，関数記号の数）を$|t|$，
項 t に変数 x が現れている回数を $|t|_x$ と書く．
つぎの式で定義される > は簡約順序である．

$$s > t \Leftrightarrow |s|>|t| \text{ and } |s|_x \geqq |t|_x \text{ for all } x \in V$$

証明は省略（自明ではないが，難しくもない）

したがって，つぎの R は停止性をもつ

$$R = \begin{cases} nand(x,x) \to not(x) \\ not(nand(x,y)) \to and(x,y) \end{cases}$$

なぜなら

$nand(x,x) > not(x)$ 　3 > 2

$not(nand(x,y)) > and(x,y)$ 　4 > 3

(Example 2)
Let $|t|$ be the number of symbols (i.e., variables, constants and function symbols) in t, and $|t|_x$ be the number of occurrences of x in t. Then the binary relation defined here is a reduction order. (Proof omitted.)

Using this fact, we see that the TRS R given here is terminating.

3．簡約順序 (6/6)

（例３）
変数に重み1，関数記号 f に正の整数の重み w_f を与え，項 t の重みの総和を $w(t)$ と書く．
つぎの > は簡約順序である．

$$s > t \Leftrightarrow w(s) > w(t) \text{ and } |s|_x \geqq |t|_x \text{ for all } x \in V$$

したがって，つぎの R は停止性をもつ

$$R = \begin{cases} not(and(x,y)) \to or(not(x), not(y)) \\ not(not(x)) \to x \end{cases}$$

because:

$w(not)=w(or)=1,\ w(and)=3$

$not(and(x,y)) > or(not(x),not(y))$ — $6 > 5$

$not(not(x)) > x$ — $3 > 1$

(Example 3)
Give a weight 1 to each variable and a positive integer w_f to each function symbol f. Let $w(t)$ be the sum of the weights of all symbols in a term t. Then the binary relation defined here is a reduction order.

For example, the TRS R given here is terminating.

【参考】多項式解釈への動機付け(1/2)

(Motivation for polynomial interpretation)

（例２）　$s > t \Leftrightarrow |s|>|t|$ and $|s|_x \geqq |t|_x$ for all $x \in V$

（例３）　$s > t \Leftrightarrow w(s) > w(t)$ and $|s|_x \geqq |t|_x$ for all $x \in V$

■例２・例３は

$|s|_x \geqq |t|_x$ for all $x \in V$

の（表現力を制限する）条件が不可欠.

なぜなら，この条件がなければ

$w(d)=3$　　$w(plus)=1$　　$w(2)=1$

とすると

$d(x) > plus(x, x)$　　　$4 > 3$

$d(d(2)) < plus(d(2), d(2))$　　　$7 < 9$

➡ ※安定性が失われる

This condition (with yellow background) in Examples 2 and 3 undesirably restricts the expressiveness of rewrite rules, but unfortunately, this condition is necessary

because without it, the strict partial order would lose its stability as shown in this example.

【参考】多項式解釈への動機付け(2/2)

$$and(x, or(y, z)) > or(and(x, y), and(x, z))$$

■この例では，どんな重みを付けても，
　　左辺 ＞ 右辺
とすることはできない

➡ 多項式解釈なら
　　左辺 ＞ 右辺
とすることができる

In this example, we can never get the left-hand side greater than the right-hand side with any weighting.

With polynomial interpretation you study in the next section, however, you will get LHS greater than RHS.

4. 多項式解釈に基づく停止性証明 (1/6)

(Termination proof by polynomial interpretation)

単調関数による解釈

$A \subseteq \{1,2,3,\cdots\}$ を正の整数の集合とし，
各関数記号 f に A の上で定義された関数

$$f_A : A \times \cdots \times A \rightarrow A$$

を対応させる.
f_Aは正の整数に関する演算を行うもので，
次式で定義される単調なものとする.

$$a > b \Rightarrow f_A(\cdots,a,\cdots) > f_A(\cdots,b,\cdots)$$

項 t に現れているすべての変数 x を A の上を動く変数 $x \in A$ と解釈し，
各関数記号 f を A の上の単調な関数 f_A と解釈してできる数式を $\varphi(t)$ とする.

f_A と $\varphi(t)$ をそれぞれ f と t の解釈という.

（定数記号は，引数無しの関数記号として扱う）

Interpretation by monotonic functions

Let $A \subseteq \{1,2,3,\cdots\}$ be a set of positive integers. We associate each function symbol f with a function f_A defined on A, where f_A is a monotone function satisfying

$$a > b \Rightarrow f_A(\cdots,a,\cdots) > f_A(\cdots,b,\cdots).$$

Let $\varphi(t)$ be a mathematical formula obtained from the term t by interpreting each function symbol f and each variable x in t as a monotone function f_A on A and a variable x moving on A, respectively.

f_A and $\varphi(t)$ are called an interpretation for f and t.

Constant symbols are regarded as function symbols with no arguments.

４． 多項式解釈に基づく停止性証明 (2/6)

（例４） (Example 4)

$$t = g(x, f(y, z))$$

$$f_A(x, y) = 2x + y + 1, \; g_A(x, y) = xy$$

$$\begin{aligned}
\varphi(g(x, f(y, z))) &= g_A(x, f_A(y, z)) \\
&= g_A(x, 2y + z + 1) \\
&= x(2y + z + 1) \\
&= 2xy + xz + x
\end{aligned}$$

4．多項式解釈に基づく停止性証明 (3/6)

解釈に基づく半順序

項の集合の上の半順序 $>_A$ をつぎの式で定義する

$$s >_A t \;\Leftrightarrow\; \varphi(s) > \varphi(s)$$

ただし，不等式 $\varphi(s) > \varphi(t)$ は，ここに含まれる変数が A のどの値をとっても，この大小関係が成り立つことを表す

Partial order induced by interpretation

We define $>_A$ to be a partial order on the set of terms, specified by

$$s >_A t \Leftrightarrow \varphi(s) > \varphi(t)$$

where $\varphi(s) > \varphi(t)$ means that this inequality holds universally (for all values of A taken by the variables in s and t).

4．多項式解釈に基づく停止性証明 (4/6)

定理３　すべての関数記号 f の解釈 f_A が単調ならば，
$>_A$ は項の集合の上の簡約順序である

Theorem 3　If the interpretations f_A for all f's are monotone,
then $>_A$ is a reduction order on the set of terms.

系４（単調な解釈に基づく停止性証明）
すべての書換え規則 $l \to r \in R$ について $\varphi(l) > \varphi(r)$
となる単調な解釈が存在すれば，R は停止性をもつ

Corollary 4 (termination proof by monotone interpretation)
If there exists a monotone interpretation φ such that $\varphi(l) > \varphi(r)$
for all rewrite rules $l \to r$ of R, then R is terminating.

4．多項式解釈に基づく停止性証明 (5/6)

多項式解釈

f_A が多項式のときの解釈を多項式解釈という

単調な多項式

多項式のすべての係数を正の整数とし，
かつ，式の値がすべての変数に依存する
ようにすれば，その多項式は単調

Polynomial interpretation

f_A is a polynomial interpretation if it is a polynomial.

A polynomial is monotonic if
- all of its coefficients are positive integers and
- its value is dependent on all variables.

4．多項式解釈に基づく停止性証明 (6/6)

（例５） (Example 5)

$$R = \begin{cases} and(x, or(y,z)) \to or(and(x,y), and(x,z)) \\ or(or(x,y),z) \to or(x, or(y,z)) \end{cases}$$

（停止性の証明） (Proof of termination)

A = {2,3,4,⋯}, $or_A(x,y) = 2x+y+1$, $and_A(x,y)=xy$

$$\begin{aligned} &\varphi(and(x, or(y,z))) \\ &= x(2y+z+1) \\ &= 2xy + xz + x \\ &> 2xy + xz + 1 \\ &= \varphi(or(and(x,y), and(x,z))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\varphi(or(or(x,y),z)) \\ &= 2(2x+y+1)+z+1 \\ &= 4x+2y+z+3 \\ &> 2x+2y+z+2 \\ &= \varphi(or(x, or(y,z))) \end{aligned}$$

➡ このような多項式解釈を見つけるソフトウェアが開発されている

演習問題6

多項式解釈

$$A = \{2,3,4,\ldots\}$$
$$plus_A(x,y) = x + 2y,$$
$$s_A(x) = x + 1$$
$$double_A(x) = 3x$$
$$0_A = 2$$

を用いて，項書換え系

$$R = \begin{cases} plus(x,0) \to x \\ plus(x,s(y)) \to s(plus(x,y)) \\ double(0) \to 0 \\ double(s(x)) \to s(s(double(x))) \end{cases}$$

の停止性を証明せよ

【注意】定数記号は引数無しの関数記号として扱う．

定数記号 0 はその本来の意味(ゼロ)にかかわらず，ここでは停止性証明の目的で，多項式(定数) 2 として解釈されている．

Exercise 6

Prove the termination of the TRS *R* given here by using the given polynomial interpretation.

Constant symbols are treated as function symbols with no arguments. The constant symbol 0 here is interpreted as a polynomial (constant) 2 for the purpose of termination proof, although its natural meaning is clearly ‘zero’.